Va ser quan el 0 va dirigir la mirada allà on la funció deia que ho veia. Aquell lloc era el punt en el qual els dos eixos, l'eix X i l'eix Y, es tallaven. Aquell lloc era l'origen de coordenades. El nombre no es podia creure el que veia: el tema en el qual es trobava i que tant l'havia fascinat tenia els inicis en el punt (0,0)!

— Ho veus? Sempre has estat trist perquè creies que, com que eres un 0, ningú et necessitava, però totes nosaltres, les funcions, no podríem ser representades si no fos per tu. És cert que representes el no-res, però, de la mateixa manera, també representes una altra cosa: l'origen. Nombre 0, tu ets l'origen d'aquest món.

El 0 va reflexionar sobre les paraules de la seva amiga i sobre tots els esdeveniments que havien succeït des que havia pres la resolució de fer aquell viatge, i va arribar a la conclusió que ella tenia raó: s'havia passat la vida queixant-se d'ell mateix i de la seva existència, però no s'havia aturat mai a pensar en les coses bones que tenia. Ara, ja no li feia res no ser com els altres; la funció li havia ensenyat que ser diferent era el que el feia ser tan únic, tan especial.

Després d'això, el 0 va agrair a la seva amiga tot el que havia fet per ell, i es va quedar a viure en aquell tema, en l'origen de coordenades, per poder estar sempre amb la funció que li havia canviat la manera de veure la vida.

Va ser així com el 0 va trobar la solució al seu problema o, dit d'una altra manera, va «trobar el valor de x en la seva equació».

I és que aquesta història acaba a l'inici, al punt (0,0).

Racó biogràfic

Guillaume F. A. de l'Hôpital (1661–1704): L'home rere la regla

Mònica Blanco
Universitat Politècnica de Catalunya

En càlcul diferencial s'associa el nom de L'Hôpital principalment amb la coneguda regla que permet avaluar el límit de funcions que presenten indeterminacions del tipus 0 entre 0, o bé infinit entre infinit, mitjançant el càlcul del límit del quocient de les derivades del numerador i del denominador. Aquest resultat apareix a la secció IX de l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, el primer manual sobre càlcul diferencial, publicat el 1696 per Guillaume François Antoine de l'Hôpital, el Marquès de l'Hôpital.

Guillaume F. A. de l'Hôpital, Marquès de Sainte-Mesme i de Montellier, comte d'Entremont, senyor d'Oucques, La Chaise, Le Bréau i altres llocs, neix a París el 1661. El Marquès signava les seves cartes com a Lhospital, però els seus contemporanis també escrivien el nom com L'Hospital, L'Hospital o L'Hôpital. De fet a l'*Éloge* que Bernard le Bovier de Fontenelle (1657–1757), secretari de l'Académie de Sciences de París, li dedica el 1708, trobem el nom escrit com L'Hôpital, forma molt propera a la que es fa servir en l'actualitat.

Figura 1. Retrat del Marquès de L'Hôpital, reproduït a Spiess (1955, p.128).

Segons sembla, la família paterna provenia d'una família napolitana, els Galluccio. Segons Spiess (1955), això podria explicar la presència d'un gall petit a l'escut de la família, com s'observa al retrat del Marquès (Figura 1).

Al seu *Éloge*, Fontenelle escriu que el jove L'Hôpital sentia poca inclinació pel llatí, però que, en canvi, mostrava passió i talent per les matemàtiques, i per la geometria en particular. Ja amb 15 anys va resoldre un problema que havia estat proposat per Pascal sobre la cicloide. El seu pare, Anne de l'Hôpital, era tinent general de l'exèrcit francès, i la seva mare, Elizabeth Gobelin, era filla d'un intendent de l'exèrcit francès i conseller d'estat. Amb aquests antecedents, no és estrany que L'Hôpital entrés al servei militar, on va arribar a ser capità de cavalleria del Regiment Coronel General. Tanmateix, a causa de la seva extrema miopia, va haver d'abandonar la carrera militar, amb la qual cosa va poder dedicar-se obertament a l'estudi de la geometria.

El 10 de juliol del 1688 es casà amb Marie-Charlotte de Romilley de la Chesnelaye, amb qui tingué tres filles i un fill, i que compartia el seu interès per les matemàtiques. La família passava l'estiu i la tardor a la seva propietat a Oucques (a la regió Centre-Vall del Loira), i la resta de l'any, a París. Gràcies a una herència de la part de la seva dona, el Marquès de l'Hôpital va afegir el títol de comte d'Entremont el 1694.

La lectura de la *Recherche de la vérité* (1674–1675) l'empeny a conèixer el seu autor, el filòsof, teòleg i pare oratorià Nicolas Malebranche (1638–1715). L'Hôpital el pren com a guia en les ciències i, com veurem més endavant, esdevindrà membre del cercle de Malebranche, al qual també pertanyia Pierre Varignon (1654–1722), entre d'altres.

A partir del 1693 és considerat com un dels geòmetres de primer rang d'Europa. Publica diversos articles a revistes d'Alemanya i de França, com *Acta Eruditorum*, *Mémoires de l'Académie des Sciences* i *Journal des Savants* (Coolidge, 1990; Spiess, 1955). Justament fou en la dècada del 1690 quan començà la seva correspondència amb Christiaan Huygens (1629-1695), Gottfried W. Leibniz (1646–1716) i Johann Bernoulli (1667–1748). El 1696 el Marquès va publicar l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), el primer manual sobre càlcul diferencial, que esdevingué un best-seller a l'època. Com a reconeixement per ser l'únic francès implicat en el desenvolupament del càlcul infinitesimal, el 1699 fou nomenat membre honorari i vicepresident de l'Académie des Sciences de París, de la qual ja era membre des del 1693. El 1707, tres anys més tard de la seva mort a causa d'una apoplexia, es publica el seu *Traité analytique des sections coniques*.

Com he comentat abans, el resultat que coneixem com a regla de *L'Hôpital* apareix a la secció IX de l'*Analyse des infiniment petits* del Marquès de l'Hôpital. Aquest manual presentava de manera sistemàtica i estructurada els fonaments del càlcul diferencial de Leibniz.

Analyse des infiniment petits

El 1684 Leibniz havia publicat a la revista *Acta Eruditorum* el primer article sobre el seu càlcul: «Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus» («Un mètode nou per a màxims i mínims, així com per a tangents, que no s'atura davant les quantitats fraccionàries o irracionals, i és un gènere singular de càlcul per a aquests problemes»). En aquest article Leibniz presentava, sense justificar, les regles bàsiques del càlcul diferencial, i la seva aplicació a alguns problemes, com el problema de la llei de la refracció i el problema de De Beaune. El de la llei de refracció consisteix a trobar un punt sobre una recta que separa dos medis de diferents densitats, de manera que el camí d'un a l'altre a través del punt sigui el més fàcil de tots els possibles, és a dir, el de recorregut mínim. D'aquesta qüestió ja se n'havien ocupat els matemàtics àrabs, com Al-Haytham (965–1039), i en els segles XV–XVI, Willebrord Snell (1581–1626), Christiaan Huygens, René Descartes (1596–1650) i Pierre de Fermat (1601–1665) (Pla et al., 2008). En el segon cas, es tracta del problema que Florimond de Beaune (1601–1652) plantejà en una carta a Descartes el 1638: trobar una corba la subtangent de la qual sigui una constant donada. Aquest problema és considerat el primer exemple del mètode invers de les tangents, o d'equacions diferencials (Fauvel i Gray, 1987).

Dos anys més tard, Leibniz publicava un altre article a la mateixa revista, aquest cop centrat en el càlcul integral: «De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum» («Sobre una geometria altament oculta i l'anàlisi dels indivisibles i infinits»), on apareix el símbol $\int$ per representar la integral.

Figura 2. Portada de l'*Analyse* (1696).

En tots dos casos es tractava d'assajos curts i difícils d'entendre, sense explicacions complementàries. La lectura i comprensió d'aquests dos articles sembla haver motivat l'interès del Marquès de l'Hôpital per explicar i difondre el càlcul de Leibniz, interès que comparteix amb Nicolas Malebranche. Tot i no ser nomenat membre honorífic de l'Académie des Sciences de París fins al 1699, la implicació de Malebranche en els assumptes de l'acadèmia tingué un paper fonamental en el desenvolupament i la difusió del càlcul a França, a través del seu cercle d'amics, contactes i corresponents. A més del Marquès de l'Hôpital, a aquest cercle pertanyien també Pierre Varignon, Charles R. Reyneau (1656–1728), Louis Carré (1663–1711) i Pierre R. de Montmort (1678–1719), entre d'altres (Robinet, 1960). Malgrat haver-se format en el pensament cartesià, en els anys 1670 Malebranche es convertí en seguidor de les teories filosòfiques i matemàtiques de Leibniz, a qui conegué personalment durant la seva visita a París (1672-1676). Tanmateix, a Malebranche li resultava molt difícil entendre els articles de Leibniz, en particular els relacionats amb el nou càlcul, tal com ho expressa en una carta que li va enviar el 1692: «No podríeu, senyor, donar al públic amb més detall del que ho heu fet les regles d'aquest càlcul i els usos que se'n poden extreure?» (Robinet, 1970, p. 58).

Així, es pot considerar que la lectura dels articles de Leibniz, junt amb la influència de Malebranche, van motivar la publicació de l'*Analyse des infiniment petits* el 1696, de manera anònima (Figura 2), tot i que a l'edició del 1716 ja se n'identifica l'autor.

Al prefaci, L'Hôpital defineix el càlcul diferencial com aquell que va de les «magnituds enteres a les seves diferències infinitament petites per comparar aquestes quantitats infinitament petites» (L'Hôpital, 1696, prefaci, XI). En canvi, el càlcul integral consisteix a «tornar d'aquestes quantitats infinitament petites a les magnituds o als totals dels quals en són les diferències, és a dir, trobar-ne les sumes» (L'Hôpital, 1696, prefaci, XI). Havent-se assabentat que Leibniz estava treballant en un tractat titulat *De scientia infiniti* (que suposadament havia d'incloure el mètode invers de les tangents, rectificació de corbes, quadratures), L'Hôpital havia decidit dedicar el seu manual únicament al càlcul diferencial.

L'*Analyse* consta de deu seccions. A la primera secció s'enuncien les definicions, les suposicions i les regles bàsiques de la diferenciació. L'Hôpital comença definint *quantitat variable i diferència*:

> Definició I: *S'anomenen quantitats variables aquelles que augmenten o disminueixen contínuament; i al contrari, quantitats constants aquelles que romanen sempre iguals mentre les altres canvien. Així, en una paràbola les abscisses i les ordenades són quantitats variables, mentre que el paràmetre és una quantitat constant.* (L'Hôpital, 1696, p. 1)
>
> Definició II: *La porció infinitament petita en què una quantitat variable augmenta o disminueix contínuament s'anomena la diferència.* (L'Hôpital, 1696, p. 2)

Com indica Schubring (2005), precisament la definició I representa una de les primeres reflexions sobre el concepte de variable. A continuació, L'Hôpital enuncia les dues suposicions següents, les quals afirma que no necessiten demostració. La primera suposició estableix què significa que dues quantitats difereixin d'una *quantitat infinitament petita*:

Suposició I. *Es poden considerar iguals dues quantitats que difereixen en una quantitat infinitament petita. Dit d'una altra manera, si una quantitat l'augmentem o la disminuïm en una quantitat infinitament menor, roman igual. Així, podrem prendre AP igual a Ap, PM igual a pm, l'espai Apm igual a l'espai APM, l'espai $MPpm$ igual al rectangle $MPpR$, el sector AMm igual al triangle $\triangle AMS$, etc.* (L'Hôpital, 1696, § 2).

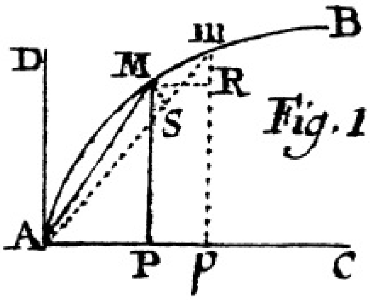

Figura 3. Figura 1 de l'*Analyse*, reproduïda a Bradley *et al.* (2015).

La segona suposició introdueix la idea de corba com a polígon infinitangular (Figura 4):

Suposició II. *Una corba pot ser considerada com un polígon d'infinits costats. Els angles entre aquests costats donen la curvatura de la corba. Per tant, la porció de corba Mm infinitament petita es pot considerar per aquesta raó com un segment rectilini i, així, el triangle $\triangle mSM$ passa a ser rectilini.* (L'Hôpital, 1696, § 3).

Aquesta idea apareix a l'article de Leibniz del 1684, a diferència del càlcul newtonià, on la corba es genera cinemàticament.

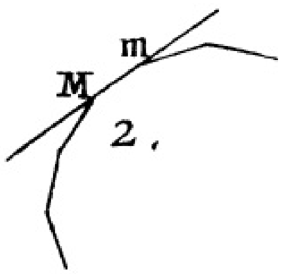

Figura 4. Figura 2 de l'Analyse, reproduïda a Bradley *et al.* (2015).

Després de les definicions i suposicions, L'Hôpital exposa, de manera justificada, les regles bàsiques de diferenciació (suma, resta, multiplicació, fraccions, potències, arrels).

La resta de seccions exposen totes les aplicacions del càlcul conegudes per resoldre problemes relacionats amb corbes: no només la determinació de tangents (secció II), de màxims i mínims (secció III) i punts d'inflexió (secció IV), sinó també problemes més nous, tòpics de recerca de finals del XVIII, com les evolutes (secció V), les càustiques per reflexió i refracció (seccions VI i VII), i les envolvents a una família de corbes (secció VIII). Per a aquests últims, el nou càlcul és gairebé l'únic capaç de resoldre'ls de manera general. La secció IX està dedicada a la resolució de diversos problemes, fent servir els mètodes precedents. En particular, la secció s'obre amb el que actualment es coneix com a *regla de L'Hôpital*.

Proposició I: *Sigui una línia corba AMD ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$) tal que el valor de l'aplicada y estigui expressat per una fracció, de la qual el numerador i el denominador esdevenen cadascun zero quan $x = a$, és a dir quan el punt P cau sobre el punt donat B. Es demana quin ha de ser llavors el valor de l'aplicada BD.* (L'Hôpital, 1696, § 163).

L'Hôpital expressa l'aplicada (és a dir, l'ordenada) PM amb la fracció general:

$$PM = \frac{AB \times PN}{PO}$$

on PN és l'ordenada de la corba ANB corresponent al numerador, i PO l'ordenada de la corba COB corresponent al denominador, que s'anul·len alhora quan el punt Pcau sobre el punt donat B (Figura 5). Aleshores prenent bd infinitament proper a BD, es té que:

$$bd = \frac{AB \times bf}{bg}$$

que no difereix de BD (aquí remet a la suposició I). Per tant, només és qüestió de buscar la raó de les ordenades bg a bf.

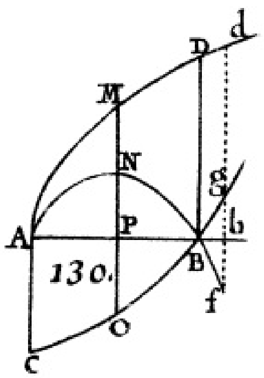

Figura 5. Figura 130 de l'*Analyse*, reproduïda a Bradley *et al.* (2015).

Finalment, a la secció X es compara l'elegància del nou càlcul amb els mètodes no tan àgils de Descartes i Hudde per trobar extrems.

La recepció de l'*Analyse*

La publicació de l'Analyse des infiniment petits generà un debat en el si de l'Académie des Sciences (1700–1706) sobre l'admissibilitat del nou càlcul. Els seus detractors, liderats per Michel Rolle (1652–1719), criticaven la manca de rigor del nou càlcul, davant dels seus defensors, liderats inicialment per Varignon (Blay, 1986; Mancosu, 1989).

Tanmateix, l'*Analyse* donà una gran embranzida al nou càlcul i, en particular, a la seva difusió i ensenyament. Així, per exemple, al seu *Éloge*, Fontenelle (1708, p. 57) destacava que L'Hôpital hagués comunicat «els tresors amagats de la nova Geometria», que hagués revelat els secrets dels infinitament petits. A la seva *Histoire des mathématiques* (1758), Montucla afirmava que els únics capaços d'entendre el càlcul de Leibniz abans del 1696 eren el mateix Leibniz, Jakob i Johann Bernoulli, Varignon i L'Hôpital. La ressenya de l'Analyse publicada al *Journal des Savants* (juny del 1696) lloava la manera estructurada i coherent de presentar el nou càlcul, tal com faria anys més tard Fontenelle a l'*Élogee* (1695?–1768) el va traduir a l'anglès (1730), però per respecte a Isaac Newton (1643–1727), el va reescriure en termes fluxionaris. L'*Analyse* també fou traduït al llatí a Viena (1764, 1790).

Per aclarir aquelles parts de l'*Analyse* que podien resultar més difícils d'entendre, a França es van publicar diversos comentaris com a suplement de l'obra de L'Hôpital:

- *Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits* (París, 1725), de Varignon, probablement escrit en part poc després de la publicació de l'*Analyse*.
- *Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits* (París, 1721), de Jean-Pierre de Crousaz (1663–1750).
- *Analyse des infiniment petits, suivie d'un nouveau commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet ouvrage* (Avinyó, 1768), d'Aimé-Henri Paulian (1722–1802).

Aquests comentaris explicaven l'obra de L'Hôpital, segons enfocaments pedagògics diversos, en un intent de fer-la més entenedora (Bella i Blanco, 2018).

La gènesi de l'*Analyse*

En el prefaci de l'*Analyse*, L'Hôpital deixa oberta la porta a les reivindicacions que en vulguin fer Leibniz i els germans Bernoulli, especialment el més jove, Johann Bernoulli (1667-1748), per haver fet servir els seus coneixements. Poc després de la mort del Marquès, Johann Bernoulli publicà a *Acta Eruditorum* una observació necessària per completar el resultat conegut ara com a *regla de L'Hôpital*, que apareixia a la secció IX de l'*Analyse*, i aprofità per reclamar-ne l'autoria. Més encara: ja en una carta a Leibniz del 1698, Bernoulli havia reinvindicat l'autoria de la major part de l'*Analyse* (Spiess, 1955). De fet, durant molt de temps es tingueren dubtes sobre qui n'era realment l'autor.

La relació entre Johann Bernoulli i L'Hôpital començà el 1691, quan Bernoulli visità Paris. Fou justament Malebranche qui presentà Johann Bernoulli a L'Hôpital. Arran d'aquesta trobada, L'Hôpital demanà a Bernoulli que l'instruís en el nou càlcul leibnizià. Les lliçons de Bernoulli comencen primer a Paris, entre finals del 1691 i el juliol del 1692, i continuen després a la propietat del Marquès a Oucques, entre l'agost i l'octubre del 1692.

Quan el 1922 Paul Schafheitlin publicà les *Lectiones de calculo differentialium* de Johann Bernoulli, es va fer palès que les quatre primeres seccions de l'*Analyse des infiniment petits* es basaven en les lliçons de Bernoulli —tot i que entre tots dos textos es detecten certes diferències (Blanco, 2001). Les *Lectiones* recullen les lliçons de Bernoulli que un amic seu copiava, abans de lliurar els originals a L'Hôpital (Blanco, 2008).

No quedà cap dubte sobre les fonts en què es basava l'*Analyse* quan es publicà la correspondència de Johann Bernoulli i L'Hôpital, que s'establí quan Bernoulli se'n tornà a Basilea (Spiess, 1955). D'una banda, alguns problemes i resultats de les sis seccions restants de l'*Analyse* es poden trobar a les seves cartes (Blanco, 2018). En particular, la *regla de L'Hôpital* es troba a la carta que Bernoulli escrigué al Marquès el 22 de juliol del 1694 (Spiess, 1955, carta número 28). D'altra banda, en una carta amb data 17 de març del 1694, L'Hôpital ofereix a Johann una renda anual de 300 lliures, quantitat que tenia intenció d'augmentar. A canvi, Bernoulli havia de comunicar-li a ell, i només a ell, les seves descobertes. En particular, li pregava que no les comuniqués a Varignon (Spiess, 1955, carta número 20). Tot i que no s'ha trobat la resposta de Johann a aquesta carta, justament de la carta abans esmentada, del 22 de juliol del 1694, es pot inferir que Bernoulli havia acceptat el tracte proposat per L'Hôpital.

Altres contribucions de L'Hôpital

L'Hôpital va publicar un altre tractat excel·lent, el *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problêmes tant déterminez qu'indéterminez*. Ja a principis dels 1690, L'Hôpital l'havia començat a preparar, i pensava annexar-lo al final de les seves notes sobre càlcul diferencial. Però, aparentment per motius de salut de l'autor, la publicació es retardà i aparegué pòstumament el 1707 a càrrec de Varignon, el mateix any que es publicà l'*Arithmetica Universalis* de Newton. Tot i no ser tan trencador com l'*Analyse*, el tractat de còniques de L'Hôpital il·lustra l'estat de la geometria analítica a Europa, i en fou text de referència durant gairebé un segle. Amb un enfocament essencialment cartesià, el *Traité analytique des sections coniques* presenta primer un tractament algebraic quasianalític de les seccions còniques; després, un estudi analític dels llocs geomètrics, i, finalment, la construcció mitjançant còniques de les arrels d'equacions cúbiques i quàrtiques, la qual cosa era, de fet, l'objectiu principal de la geometria analítica en aquella època (Boyer, 1956).

No és tan conegut el fet que L'Hôpital exposà una de les primeres rectificacions de la corba logarítmica. El 14 de desembre del 1692 L'Hôpital envià la primera carta a Leibniz, que acompanyava una carta de Malebranche. En aquesta primera carta, L'Hôpital exposava com rectificar la corba logarítmica, és a dir, com determinar geomètricament una línia recta igual a una porció qualsevol d'aquesta corba, amb ajut del càlcul de Leibniz. Abans d'enviar la proposta a Leibniz, L'Hôpital havia discutit prèviament aquest problema en la seva correspondència amb Huygens (Blanco, 2016).

En general, en les seves cartes L'Hôpital plantejava i tractava diversos problemes matemàtics, en particular, relacionats amb el nou càlcul. Així, per exemple, el 1690 L'Hôpital envià a Huygens un nou resultat sobre la determinació del centre d'oscil·lació del pèndol, problema en el qual també havia estat treballant Jakob Bernoulli (1654–1705). Huygens, satisfet amb el resultat de L'Hôpital, el va fer publicar en una revista holandesa. Aquesta primera publicació va atreure l'atenció sobre aquest autor fins aleshores desconegut.

A partir d'aquí, L'Hôpital contribuí sovint a les revistes més importants de França i Alemanya. Així, la seva solució del problema de De Beaune aparegué al *Journal des Savants* el 1692 (que va signar com a Mr. G***). A *Acta Eruditorum* va publicar el 1695 la seva solució al problema sobre el pont llevadís, o problema d'equilibri, i, dos anys més tard, la seva solució al problema de la corba de descens més ràpid, o problema de la braquistocrona. I la seva solució al problema de la corba centrífuga es troba a les *Mémoires de l'Académie des Sciences* del 1701. Molts d'aquests problemes els va discutir en la seva correspondència amb Johann Bernoulli. Es podria dir que, sense el suport i els consells de Bernoulli, L'Hôpital potser no hauria arribat a la solució d'aquests problemes.

Tanmateix, no es pot menystenir el fet que L'Hôpital participà activament en els reptes matemàtics de la seva època. Gràcies a la seva iniciativa i a la seva interacció amb Johann Bernoulli, l'*Analyse des infiniment petits* esdevingué una fita en el desenvolupament i la circulació del càlcul diferencial.

Referències

[1] S. Bella i M. Blanco. «Comentaris sobre *Analyse des infiniment petits* de l'Hospital (1696–1768): interpretació i ensenyament de conceptes fonamentals del càlcul diferencial». A: M. R. Massa-Esteve i P. Grapí (eds.). *Actes de la XV Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament «Antoni Quintana Marí»*. Barcelona: Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica (2018), 49–56.

[2] M. Blanco. «Análisis de la discusión L'Hôpital - Bernoulli», *Cronos*, 4 (2001), 81-113.

[3] M. Blanco. «On how Johann Bernoulli's lessons on differential calculus were communicated in eighteenth-century France and Italy». A: J. Simon.; N. Herran.; T. Lanuza-Navarro; P. Ruiz-Castell; X. Guillem-Llobat (eds.). *Beyond Borders: Fresh Perspectives in History of Science*: Cambridge: Cambridge Scholars Press (2008), 113–140.

[4] M. Blanco. «El Marqués de L'Hospital y la rectificación de la curva logarítmica», *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 82 (2016), 43–50.

[5] M. Blanco. «La correspondencia entre Leibniz y el Marqués de L'Hospital: sobre la envolvente de una familia de curvas». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, XVI (2018), 143–165.

[6] M. Blay (1986). «Deux moments de la critiques du calcul infinitésimal: Michel Rolle et George Berkeley». *Revue d'histoire des sciences* 39 (1986), 223–253.

[7] C. Bossut. *Essai sur l'Histoire Générale des Mathématiques*, 2 vols. Paris: chez Louis (1802). II, 27–29; 53–56.

[8] C. B. Boyer. *History of Analytic Geometry*. New York: Dover Publications (2004), reedició de l'obra original publicada el 1956.

[9] R. E. Bradley; S. J. Petrilli; C. E. Sandifer. *L'Hôpital's Analyse des infiniments petits: an annotated translation with source material by Johann Bernoulli*. Cham: Birkhäuser (2015).

[10] J. L. Coolidge. *The Mathematics of Great Amateurs*, Oxford: Clarendon Press (1990), 147-170.

[11] J. Fauvel i J. Gray. *The History of Mathematics*. A reader, The Open University (1987).

[12] B. le B. de Fontenelle, Bernard de (1708). *Histoire du renouvellement de l'Académie royale des sciences*, Paris: chez Boudot (1708).

[13] G. F. A. de L'Hôpital. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: Imprimerie Royale (1696).

[14] G. F. A. de L'Hôpital. *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problêmes tant déterminez qu'indéterminez*. Paris: chez Boudot (1707).

[15] P. Mancosu. «The Metaphysics of the Calculus: A Foundational Debate in the Paris Academy of Sciences, 1700–1706». *Historia Mathematica*, 16 (1989), 224–248.

[16] J. E. Montucla. *Histoire des mathématiques*, en 4 vols. Paris: chez Agasse (1758), II, 358–359.

[17] J. Pla; P. Viader; J. Paradís. *Pierre de Fermat. Obra Matemàtica Vària*, Barcelona: Institut d'Estudis Catalans (2008).

[18] A. Robinet. «Le groupe malebranchiste introducteur du Calcul infinitésimal en France». *Revue d'Histoire des Sciences*, XIII (1960), 287–308.

[19] A. Robinet. *Malebranche de l'Académie des sciences: l'oeuvre scientifique*, 1674–1715. París: J. Vrin (1970).

[20] G. Schubring. *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition*. New York: Springer (2005).

[21] O. Spiess (ed.). *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, vol. I. Basilea: Birkhäuser (1955).